

Álgebra lineal en notación de Dirac

Rescapitulando

Vectores "kets" $|\alpha\rangle \in \mathcal{H}$

Vectores duales "bras" $\langle\alpha| \in \mathcal{H}^* \sim \mathcal{H}$

$$a|\alpha\rangle + b|\beta\rangle \xleftrightarrow{\text{conjugado}} a^* \langle\alpha| + b^* \langle\beta|$$

$$c|\alpha\rangle = |\alpha\rangle c \quad (\text{los escalares se pueden mover})$$

(y sólo los escalares!)

Operadores $\hat{A}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$

Def: El dual de $A|\psi\rangle$ es $\langle\psi|A^\dagger$

$A^\dagger$ es el conjugado hermitiano hermitico

Def equivalente $(|\alpha\rangle, \hat{A}|\beta\rangle) = (\hat{A}^\dagger|\alpha\rangle, |\beta\rangle)$

Nota: Tanto $\hat{A}|\psi\rangle$ como $\langle\psi|\hat{A}$ son objetos válidos.

Sin embargo, al conjugar $\hat{A}|\psi\rangle$ no obtenemos necesariamente $\langle\psi|\hat{A}$.

Ya sabemos que $\langle\psi|\varphi\rangle = \langle\varphi|\psi\rangle^*$

Si tomamos $|\varphi\rangle = A|\alpha\rangle$ y $|\psi\rangle = |\beta\rangle$
Como $\langle\varphi| = \langle\alpha|A^\dagger$ $\langle\psi| = \langle\beta|$

$$\langle\beta|A|\alpha\rangle = \langle\alpha|A^\dagger|\beta\rangle^*$$

∴ Al conjugar $\langle\alpha|A|\beta\rangle$ hay que conjugar el operador también.

```
In[15]= (1 0). (I I) // MatrixForm
Out[15]//MatrixForm=
(1 0)
```

```
In[17]= (I I). (1 0) // MatrixForm
Out[17]//MatrixForm=
(1 0)
```

```
In[16]= ((1 0). (I I))' // MatrixForm
Out[16]//MatrixForm=
(1 0)
```

- Def: A es hermitiano si $A = A^+$

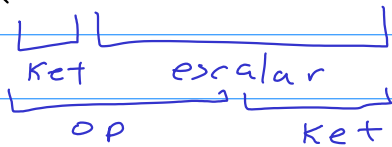
→ $\hat{A}, \hat{B}$ operadores $\hat{A}\hat{B}$ operador.

→ $\odot \int \odot : \hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$

→ Definir conmutador $[A, B] = AB - BA$

Operadores definidos con producto ext.

$$(|\alpha\rangle\langle\beta|) |\gamma\rangle = |\alpha\rangle \langle\beta|\gamma\rangle = \langle\beta|\gamma\rangle |\alpha\rangle$$



→ Con kets y bras podemos definir operadores.

Producto exterior

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & \dots & \beta_n \end{pmatrix}$$

matricial

$$|\alpha\rangle\langle\beta|$$

$$\text{ojo } |\alpha\rangle\langle\beta| = |\alpha\rangle\langle\beta|$$

$$\text{Obs } (|\alpha\rangle\langle\beta|)^+ = ?$$

$$\begin{aligned} \langle\psi|A^+|\phi\rangle &= \langle\phi|A|\psi\rangle^* \Rightarrow \langle\psi|(|\alpha\rangle\langle\beta|)^+|\phi\rangle = (\langle\phi|\alpha\rangle\langle\beta|\psi\rangle)^* \\ &= \langle\beta|\psi\rangle\langle\phi|\alpha\rangle \\ &= \langle\psi|(|\beta\rangle\langle\alpha|)|\phi\rangle \end{aligned}$$

$$\therefore (|\alpha\rangle\langle\beta|)^+ = |\beta\rangle\langle\alpha|$$

Bases

- Base es un conjunto ^{ordenado} LI. de vectores que generan al espacio

$$\mathcal{B} = \{ |b_i\rangle : i \in I \}$$

Si escribimos $|\alpha\rangle = \sum_{i \in I} a_i |b_i\rangle$

La representación por componentes de $|\alpha\rangle$ en la base $\mathcal{B}$ es

$$[|\alpha\rangle]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix}$$

Nos vamos a concentrar en bases ^{ortogonales de norma 1} ortogonales
Es decir

$$\langle b_i | b_j \rangle = \delta_{ij} \text{ de Kronecker}$$

Así, si $|\alpha\rangle = \sum_i a_i |b_i\rangle$, $\langle b_j | \alpha \rangle = \sum_i a_i \underbrace{\langle b_j | b_i \rangle}_{\delta_{ji}} = a_j$

$\therefore$ La componente j del vector $|\alpha\rangle$ en la base $\mathcal{B}$ es $a_j = \langle b_j | \alpha \rangle$

(en componentes)

¿Cuál es la representación matricial de los vectores base?

$$|b_j\rangle = \sum_{i \in I} c_i |b_i\rangle \Rightarrow c_i = \langle b_i | b_j \rangle = \delta_{ij}$$

$$[|b_j\rangle]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_j \quad \left| \quad [\langle b_j |]_{\mathcal{B}} = (c_1^*, \dots, c_N^*) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$$

$j \downarrow$

Relación de completitud

Como $|\alpha\rangle = \sum_{i \in I} a_i |b_i\rangle = \sum_i |b_i\rangle a_i$

$$= \sum_i |b_i\rangle \langle b_i | \alpha \rangle$$
$$= \left(\sum_i |b_i\rangle \langle b_i| \right) |\alpha\rangle$$

Como $|\alpha\rangle$ es arbitrario

$$\sum_i |b_i\rangle \langle b_i| = \mathbb{1}$$

Esta relación es muy útil.

Se llama: relación de completitud
completitud
resolución de la identidad

$$\langle \alpha | = \langle \alpha | \mathbb{1} = \sum_i \langle \alpha | b_i \rangle \langle b_i | = \sum_i \overset{\uparrow *}{a_i^*} \langle b_i |$$

Como $\langle \alpha |$ es una transformación lineal la podemos representar con una matriz en la base $\mathcal{B}$.

$\langle \alpha | u_i \rangle$ Las columnas de la matriz se obtienen al aplicar el funcional a los vectores base.

$$[\langle \alpha |]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \downarrow * & & * \\ a_1^* & \dots & a_N^* \end{pmatrix}$$

- La relación entre las matrices que representan a $\langle\psi|$ y $|\psi\rangle$ es que una es el conjugado Hermitiano de la otra.

Con una base podemos expresar el producto punto.

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \langle\alpha|1|\beta\rangle = \dots = \sum \alpha_i^* \beta_i$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ (\alpha_1^*, \dots, \alpha_N^*) \end{matrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_N \end{pmatrix} = \alpha_1^* \beta_1 + \dots + \alpha_N^* \beta_N$$

Notar que este producto punto lo podemos ver como aplicar la transformación lineal $\langle\alpha|$ al vector $|\beta\rangle$

¿Cómo es la matriz asociada al operador $U = |u_i\rangle\langle u_j|$?

$$[|u_i\rangle\langle u_j|]_x = (U|u_1\rangle, \dots, U|u_k\rangle, \dots, U|u_p\rangle)$$

$$|u_i\rangle\langle u_j|u_k\rangle = |u_i\rangle \delta_{jk} = \left(0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{columna } j}}{[|u_i\rangle]_x}, 0, \dots, 0\right)$$

sólo la columna j es distinta de cero.

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} i \\ j \\ j \end{matrix}$$